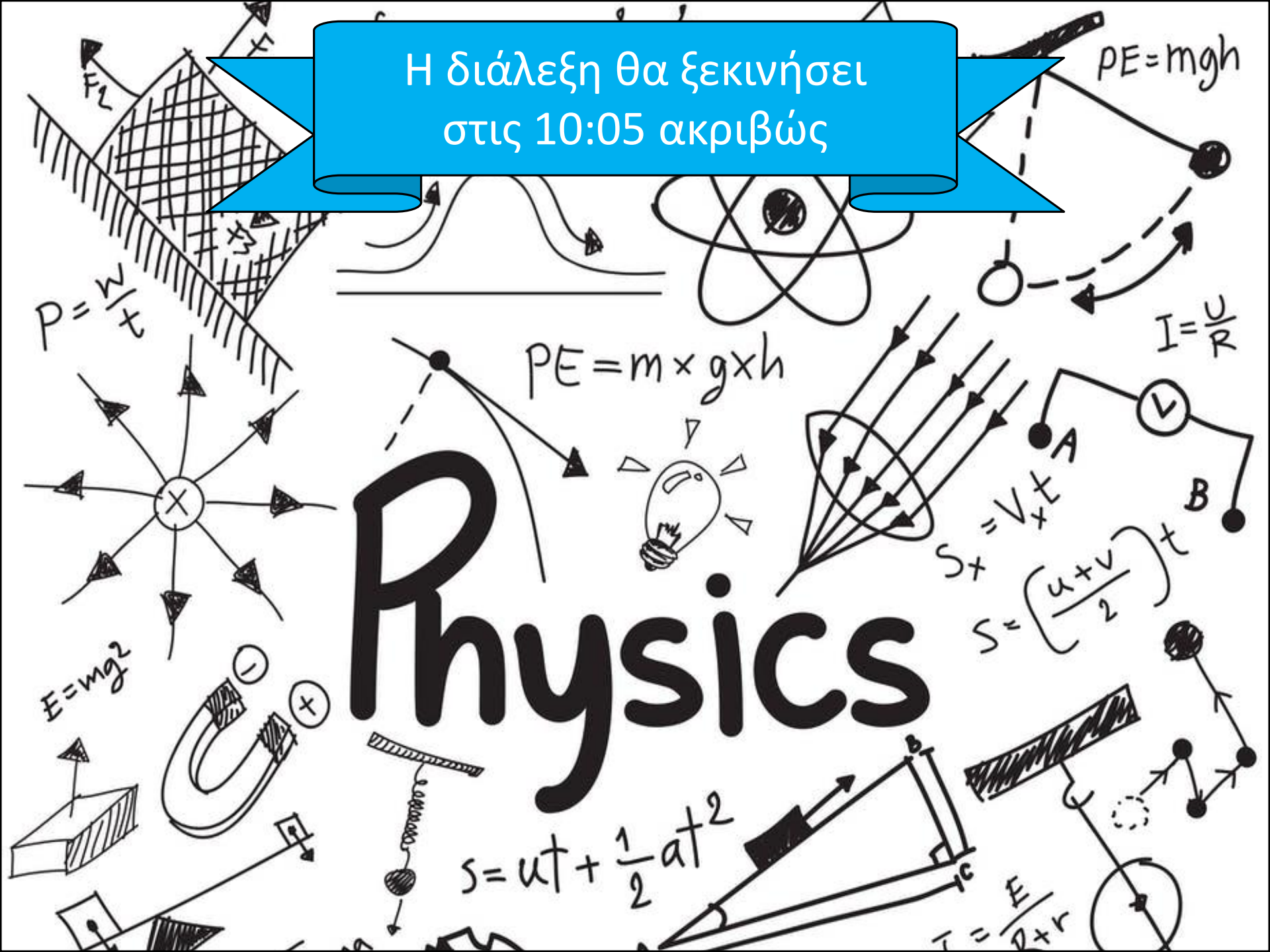
Η διάλεξη θα ξεκινήσει
στις 10:05 ακριβώς



Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss

Εικόνα: Σε μια επιτραπέζια μπάλα πλάσματος, οι χρωματιστές γραμμές που βγαίνουν από τη σφαίρα αποδεικνύουν την ύπαρξη ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου. Με το νόμο του Gauss, δείχνουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που περιβάλλει μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα είναι όμοιο με αυτό γύρω από ένα σημειακό φορτίο.

Φυσική για Μηχανικούς

Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss (επανάληψη…)

- **Ηλεκτρική ροή**: φυσικό μέγεθος ανάλογο του αριθμού των δυναμικών γραμμών ενός ηλεκτρικού πεδίου που διαπερνούν μια επιφάνεια

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}, \qquad επιφ. A \perp \vec{E}$$

- **Ηλεκτρική Ροή:** για οποιαδήποτε επιφάνεια

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{A}$$

- **Νόμος του Gauss: Η ηλεκτρική ροή διαμέσου οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας γύρω από ένα σημειακό φορτίο q είναι**

$$\mathbf{\Phi_E} = \boldsymbol{q/\epsilon_0}$$

και είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της

Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Ας επεκτείνουμε τα αποτελέσματά μας σε δυο γενικές περιπτώσεις:
  - 1) Πολλά σημειακά φορτία
  - 2) Συνεχής κατανομή φορτίου

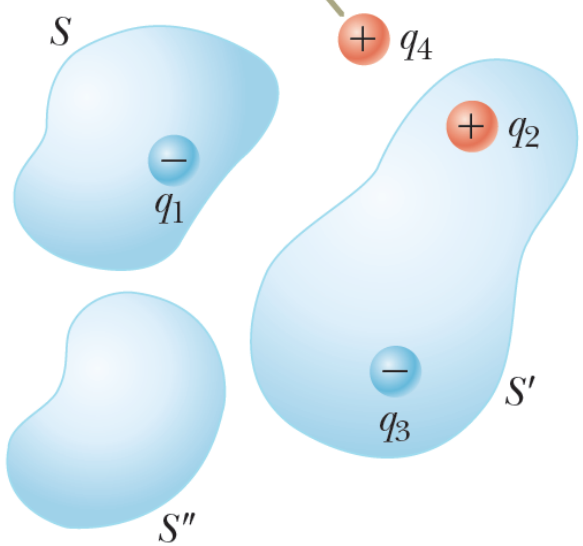
Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Για πολλά (έστω M) σημειακά φορτία, έχουμε για όποια κλειστή επιφάνεια

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{A} = \oint \left(\sum_{i=1}^{M} \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{A}$$

  - Παράδειγμα:
    - $\Phi_E = q_1/\epsilon_0$ για την επιφάνεια S
    - $\Phi_E = (q_2+q_3)/\epsilon_0$ για την S'
    - $\Phi_E = 0$ για την S''
    - Το φορτίο q_4 δε συνεισφέρει ηλεκτρική ροή σε καμιά επιφάνεια

Το φορτίο q4 δε συνεισφέρει στην ηλεκτρική ροή καμιάς επιφάνειας επειδή βρίσκεται εκτός όλων των επιφανειών.



Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**

- Άρα

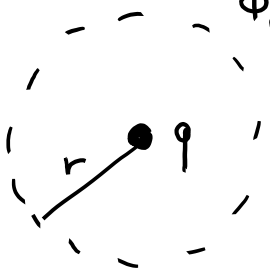
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

  όπου $\vec{E}$ το ηλεκτρικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας και q_{in} το συνολικό φορτίο εντός της επιφάνειας
- Μπορούμε από την παραπάνω σχέση να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$
- Ας δούμε πώς…

Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
- **<u>Quiz</u>:** μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια περικλείει φορτίο q και έχει ηλεκτρική ροή Φ_E.
  Τι συμβαίνει στην ηλεκτρική ροή αν:
  α) το φορτίο εντός της τριπλασιάζεται
  β) η ακτίνα της σφαίρας διπλασιάζεται
  γ) η επιφάνεια μετατρέπεται σε κύβο
  δ) το φορτίο μετακινείται σε άλλο σημείο

$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$



α) $q \to 3q \Rightarrow \Phi_E' = 3\Phi_E$

β) Φ_E

γ) Φ_E

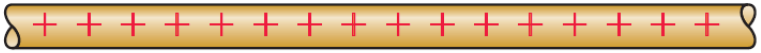
δ) εντός επιφάνειας, Φ_E, εκτός επιφάνειας $\Phi_E = 0$

Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Ο νόμος του Gauss μπορεί να φανεί χρήσιμος για την **εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου** όταν η κατανομή φορτίου είναι υψηλά ***συμμετρική***
  - Αυτό συμβαίνει με κατάλληλη επιλογή γκαουσιανής (κλειστής) επιφάνειας όπου το διάνυσμα $d\vec{A}$ στο ολοκλήρωμα ορίζεται (και υπολογίζεται) με πολύ απλό τρόπο
    - **Η γκαουσιανή επιφάνεια και η κατανομή πρέπει να «ταιριάζουν»**
    - **Επιλέγουμε επιφάνεια ίδιας ή παρόμοιας συμμετρίας με την κατανομή φορτίου**
  - Επιπλέον, πρέπει να εκμεταλλευόμαστε τη συμμετρία της κατανομής φορτίου για να βγάλουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ εκτός ολοκληρώματος της ηλεκτρικής ροής
  - Αν δεν μπορούμε να βρούμε μια τέτοια επιφάνεια, ο νόμος του Gauss ισχύει ακόμα, αλλά *δε μας είναι χρήσιμος στην εύρεση του ηλεκτρικού πεδίου*

Ο νόμος του Gauss

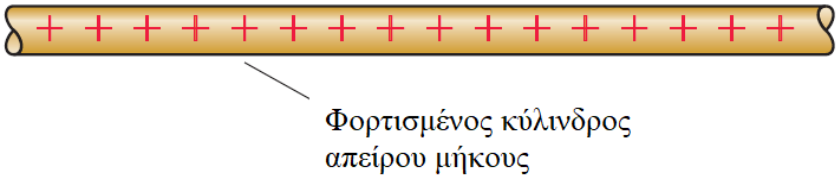
- **Συμμετρίες**
- Υποθέστε ότι για ένα ηλεκτρικό πεδίο δε γνωρίζετε τίποτα παρά μόνο ότι:
  - Η φορά του είναι από θετικά προς αρνητικά φορτία
  - Το πεδίο εγείρει μια ηλεκτρική δύναμη σε ένα φορτισμένο σωματίδιο
- Αν όμως το ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει λόγω μιας κατανομής φορτίου που τηρεί μια συμμετρία?



Φορτισμένος κύλινδρος απείρου μήκους

- Λέμε ότι μια κατανομή φορτίου είναι **συμμετρική** αν υπάρχει ομάδα *γεωμετρικών μετασχηματισμών* που δεν προκαλεί κάποια φυσική αλλαγή στην κατανομή
- Κλείστε τα μάτια σας
  - Μετατοπίστε παράλληλα τον κύλινδρο
  - Περιστρέψτε τον γύρω από έναν άξονα
  - Αντανακλάστε το φορτίο σε έναν καθρέπτη

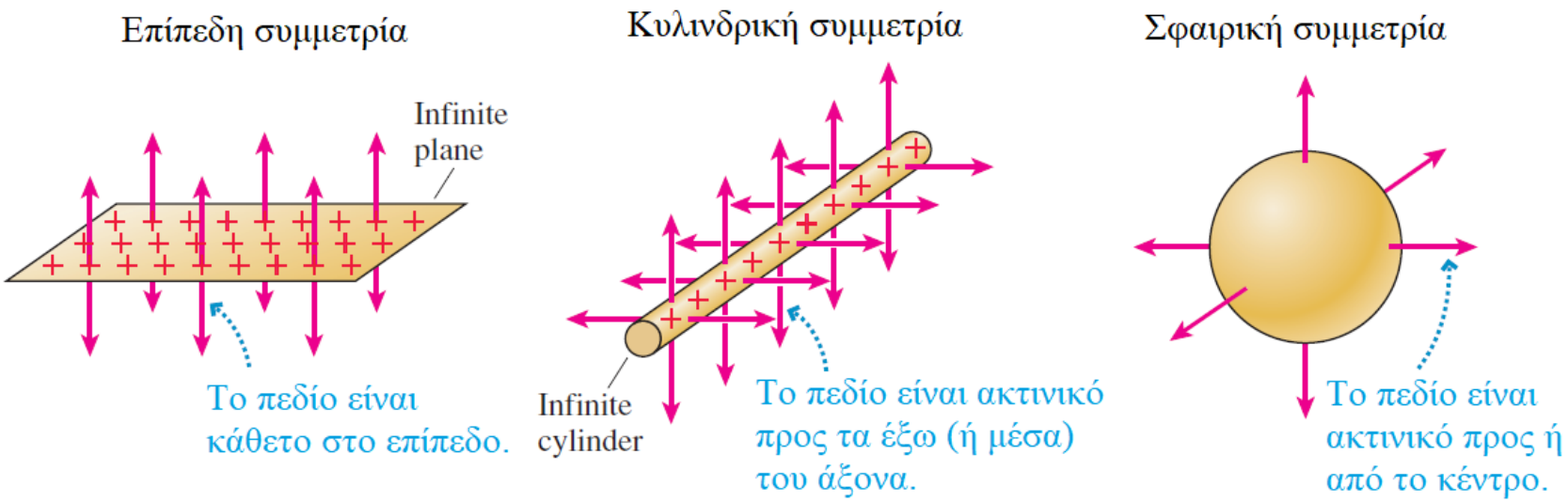
Ο νόμος του Gauss



- **Συμμετρίες**
- Ανοίξτε τα μάτια σας
  - Μπορείτε να πείτε αν η κατανομή φορτίου άλλαξε μετά τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς?
  - Αν όχι, τότε λέμε ότι η κατανομή είναι **συμμετρική** όσον αφορά τον/τους μετασχηματισμό/ούς
- Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η συμμετρία είναι *κυλινδρική*
  - Υπάρχουν κι άλλες συμμετρίες (σφαιρικές, επιπέδου)
  - …ή και καθόλου συμμετρίες σε κάποιες κατανομές φορτίων
- Με βάση τα παραπάνω, **η συμμετρία του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να «ταιριάζει» στη συμμετρία της κατανομής φορτίου**
  - Αν αυτό δεν ίσχυε, θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε το ηλεκτρικό πεδίο για να μάθετε αν η κατανομή φορτίου είχε υποστεί μετασχηματισμό
- Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να μαθαίνουμε για το «σχήμα» του ηλεκτρικού πεδίου

Ο νόμος του Gauss

- **Συμμετρίες**
- Ενδιαφέρουσες συμμετρίες για μας είναι οι ακόλουθες



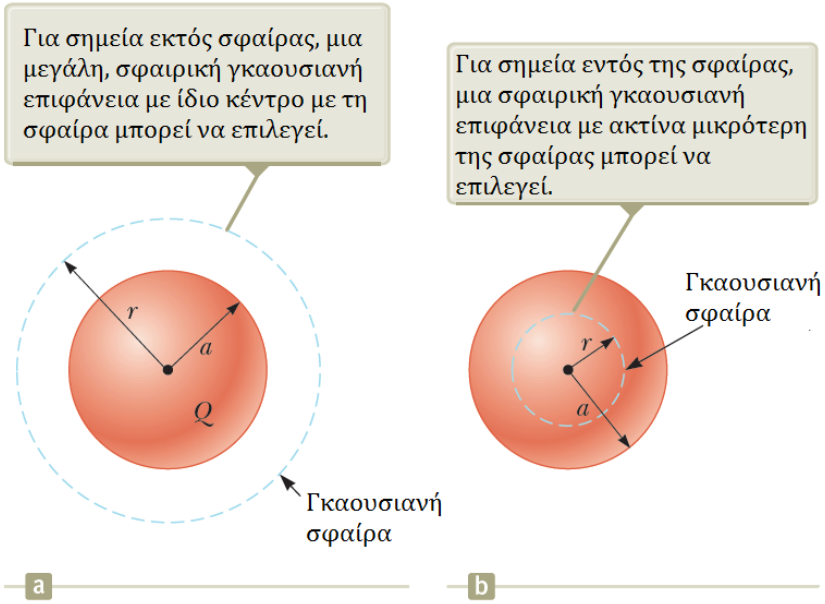
Ο νόμος του Gauss

- **Ο νόμος του Gauss**
  - Για την εύρεση του ηλεκτρικού πεδίο μέσω του νόμου ου Gauss, πρέπει να επιλέξουμε μια κατάλληλη επιφάνεια η οποία να ικανοποιεί **μια ή περισσότερες** από τις παρακάτω συνθήκες:

1. **Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να θεωρηθεί σταθερή λόγω συμμετρίας επάνω σε όλη ή τμήμα της επιφάνειας**
2. **Το εσωτερικό γινόμενο του νόμου του Gauss μπορεί να εκφραστεί ως απλό αλγεβρικό γινόμενο EdA, δηλ. τα $\vec{E}$ και d$\vec{A}$ είναι παράλληλα**
3. **Το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν γιατί τα παραπάνω διανύσματα είναι κάθετα**
4. **Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας**

Ο νόμος του Gauss

- **Παράδειγμα:**
- Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας a έχει ομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου ρ σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q.



Α) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο ***εκτός*** της σφαίρας

Β) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο ***εντός*** της σφαίρας

Ο νόμος του Gauss

1. **Σταθερή τιμή του $\vec{E}$ στην επιφάνεια**
2. **$\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα**
3. **$\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι κάθετα**
4. **$\vec{E}$ είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας**

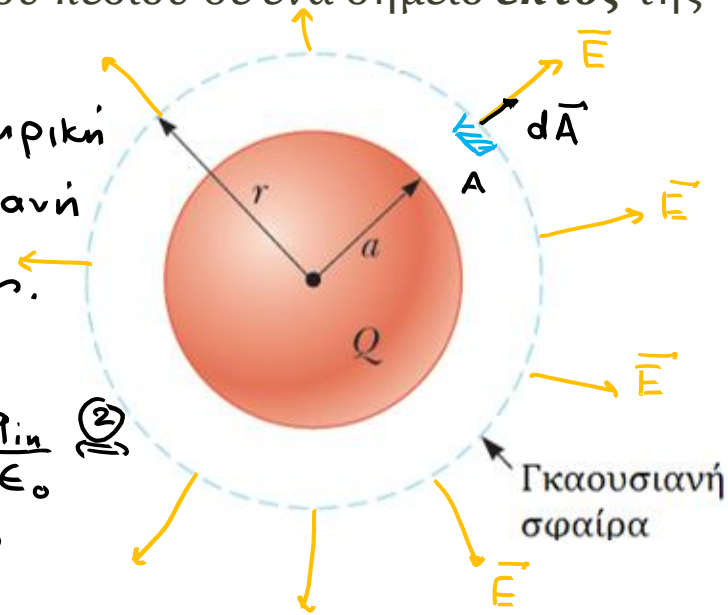
- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας *a* έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου *ρ* σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q.
    Α) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο ***εκτός*** της σφαίρας

Αναγνωρίζαμε ότι η κατανομή έχει σφαιρική συμμετρία. Επιλέγαμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας r. Από τις συνθήκες, ισχύει η (1) ισχύει επίσης η (2)

Από το νόμο Gauss: $\Phi_E = \oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \oint E\, dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} E \underbrace{\oint dA}_{4\pi r^2} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} = k_e \frac{Q}{r^2}$

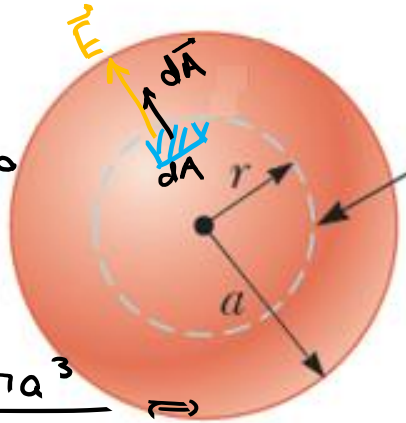


Ⓐ $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q_{in}}{V_{in}}$, $V = \frac{4}{3}\pi a^3$

Ο νόμος του Gauss

1. **Σταθερή τιμή του $\vec{E}$ στην επιφάνεια**
2. **$\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα**
3. **$\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι κάθετα**
4. **$\vec{E}$ είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας**

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Μια μονωμένη στερεή σφαίρα ακτίνας *a* έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου *ρ* σε όλο τον όγκο της και φέρει συνολικό θετικό φορτίο Q. Β) Υπολογίστε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο ***εντός*** της σφαίρας



Αναγνωρίζαμε τη σφαιρική συμμετρία.
Επιλέγαμε σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας $r < a$. Ισχύει η συνθήκη ①.
Επίσης, ισχύει η ②. Από νόμο Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \overset{Ⓐ}{=} \frac{\rho V_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi a^3}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\overset{②}{\Leftrightarrow} \oint E\,dA = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi a^3}{\epsilon_0} \overset{①}{\Leftrightarrow} E \underbrace{\oint dA}_{4\pi r^2} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi a^3}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \rho \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^3} \cdot r = k_e \frac{Q}{a^3} \cdot r = k_e \frac{Q}{a^2}\left(\frac{r}{a}\right).$$

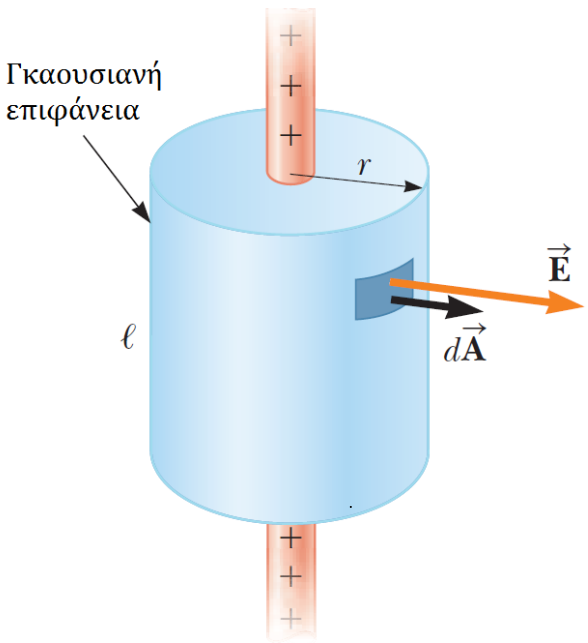
Ο νόμος του Gauss

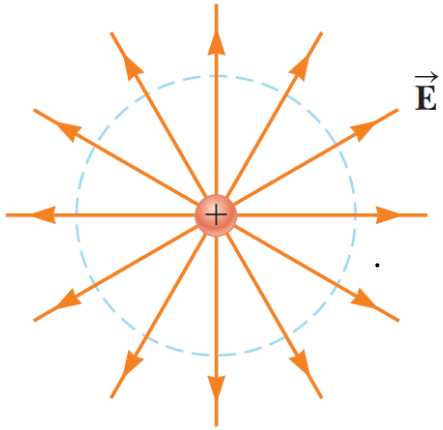
1. **Σταθερή τιμή του $\vec{E}$ στην επιφάνεια**
2. **$\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα**
3. **$\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι κάθετα**
4. **$\vec{E}$ είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας**

- **Παράδειγμα:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και απείρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ.

Hint:

$$E_P = \frac{k_e Q}{x\sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = k_e \frac{2\lambda}{x} \frac{1}{\sqrt{1 + \cancel{\frac{4x^2}{l^2}}}} \to 0$$





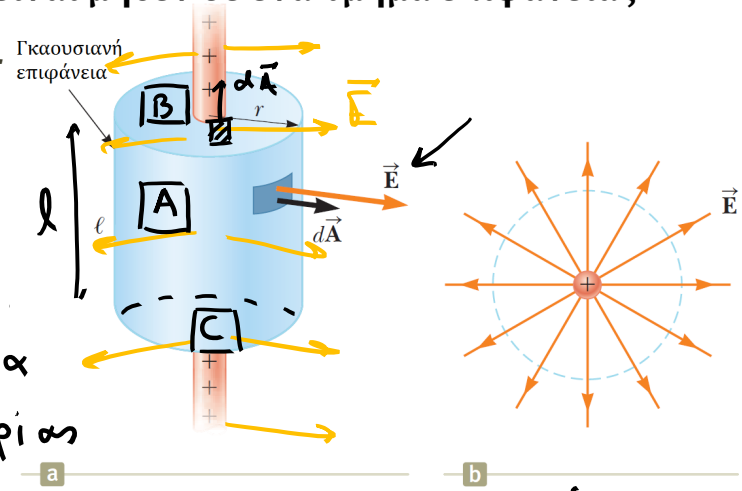
$$\lim_{l \to +\infty} E_P = k_e \frac{2\lambda}{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x},$$

με x η απόσταση από το ράβδο.

Ο νόμος του Gauss

1. **Σταθερή τιμή του $\vec{E}$ στην επιφάνεια**
2. **$\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα**
3. **$\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι κάθετα**
4. **$\vec{E}$ είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας**

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και απείρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ.



Αναγνωρίζαμε την κυλινδρική συμμετρία. Επιλέγαμε κυλινδρική κλειστή επιφάνεια ακτίνας r και μήκους ℓ. Λόγω συμμετρίας το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό σε απόσταση r από τη ράβδο. Για την επιφάνεια $\boxed{A}$ ισχύει η (1). Ισχύει η (2) για την ίδια επιφάνεια $\boxed{A}$. Ισχύει η (3) για τις επιφάνειες $\boxed{B}$, $\boxed{C}$.

Νόμος Gauss: $\Phi_E = \Phi_E^A + \Phi_E^B + \Phi_E^C = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \dfrac{q_{in}}{\epsilon_0}$

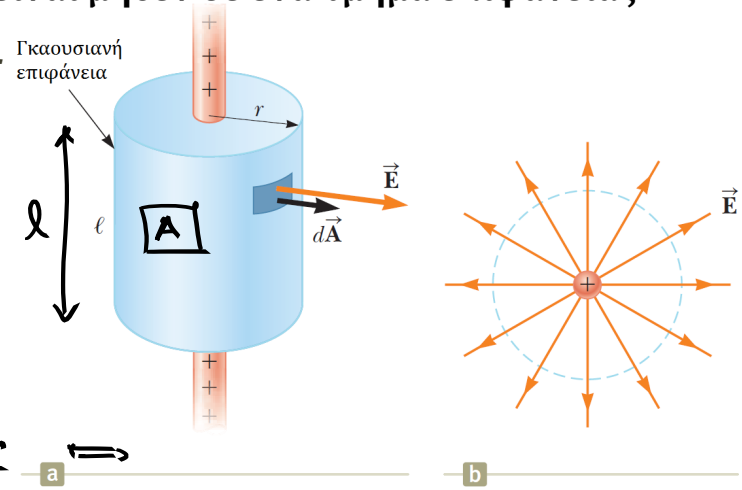
$$\oint_B \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$$

$$(*)\ \lambda = \frac{Q}{L} = \frac{q_{in}}{\ell} \Rightarrow q_{in} = \lambda \ell$$

Ο νόμος του Gauss

✓1. Σταθερή τιμή του $\vec{E}$ στην επιφάνεια
✓2. $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα
3. $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι κάθετα
4. $\vec{E}$ είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια γραμμή θετικά φορτισμένη και απείρου μήκους. Η γραμμή έχει σταθερή γραμμική πυκνότητα φορτίου λ.



$$\Phi_E = \Phi_E^A = \oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \oint_A E\,dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} E \underbrace{\oint_A dA}_{2\pi r \ell} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Longleftrightarrow$$

$$\Rightarrow E \cdot 2\pi r \ell = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \overset{(*)}{=} \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{\lambda \cancel{\ell}}{2\pi r \cancel{\ell} \epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Άρα $$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

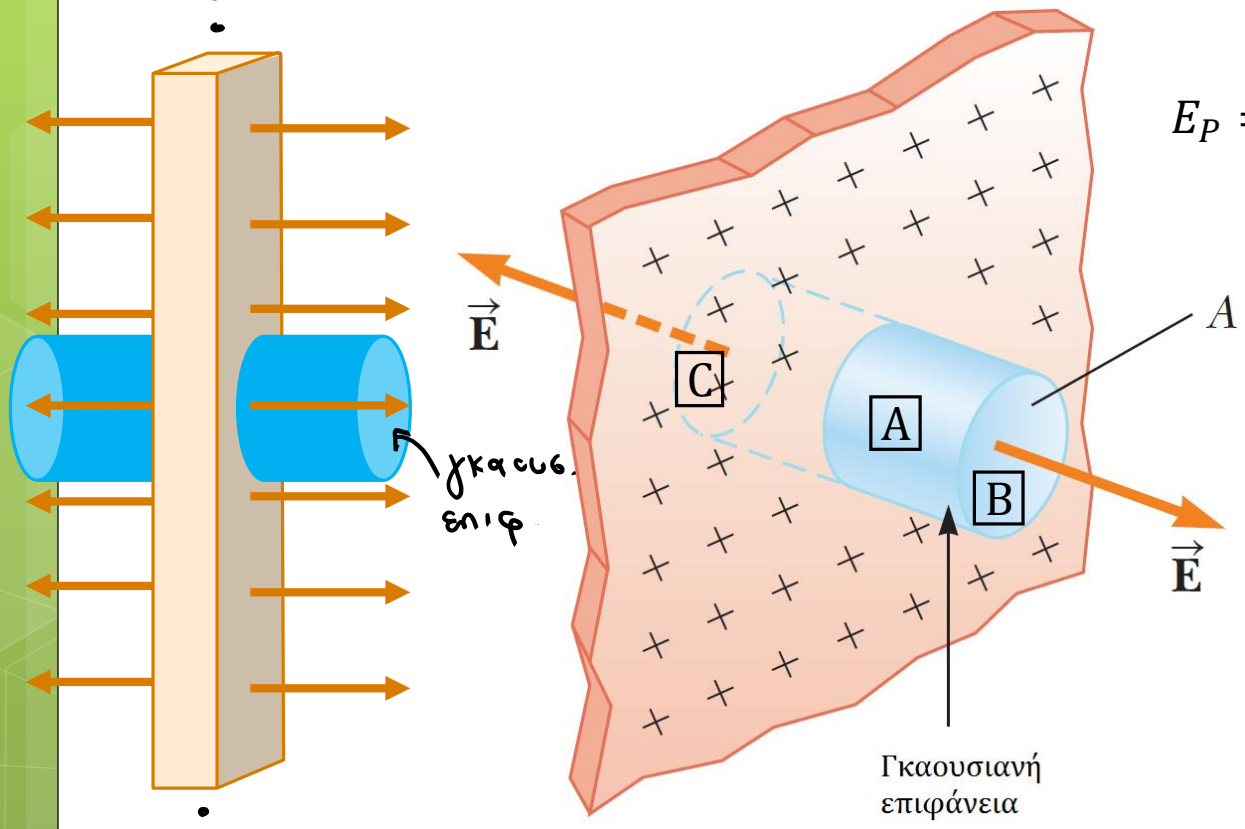
Ο νόμος του Gauss

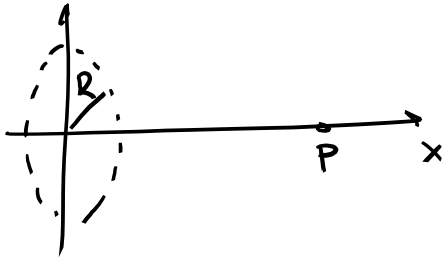
1. **Σταθερή τιμή του $\vec{E}$ στην επιφάνεια**
2. **$\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα**
3. **$\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι κάθετα**
4. **$\vec{E}$ είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας**

- **Παράδειγμα:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω μιας άπειρης επιφάνειας θετικά φορτισμένης με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ.

Hint:

$$E_P = 2k_e\pi\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$$





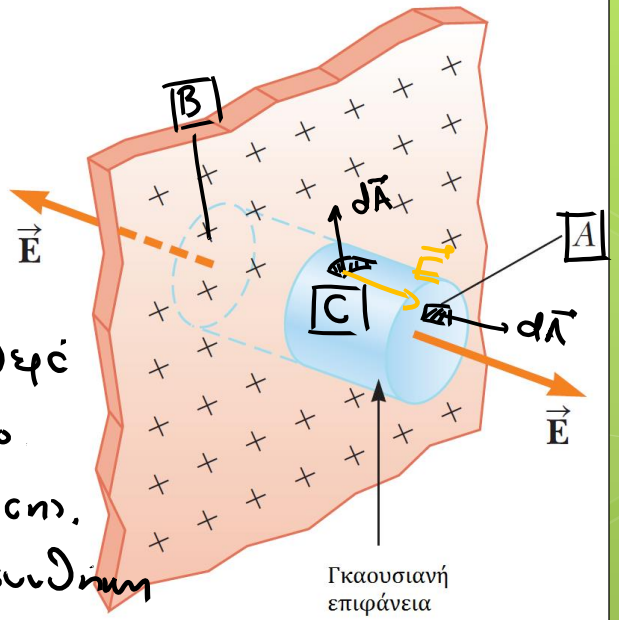
$$\lim_{R\to+\infty} E_P = 2k_e\pi\sigma = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

(*) $\sigma = \frac{Q}{A}$

Ο νόμος του Gauss

1. Σταθερή τιμή του $\vec{E}$ στην επιφάνεια
2. $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα
3. $\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι κάθετα
4. $\vec{E}$ είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω μιας άπειρης επιφάνειας θετικά φορτισμένης με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ.



Αναγνωρίζαμε την επιφανειακή συμμετρία. Επιλέγαμε κυλινδρική κλειστή επιφάνεια. Λόγω συμμετρίας, το ηλ. πεδίο θα είναι σταθερό σε οποιοδήποτε σημείο μακριά από το επίπεδο. Από αυτό, συνεπάγεται ότι ισχύει η (1). Επίσης, ισχύει η (2) για τις επιφάνειες B, A. Η συνθήκη (3) ισχύει για την επιφάνεια C. Από το νόμο του Gauss:

$$\Phi_E = \Phi_E^A + \Phi_E^B + \Phi_E^C = \Phi_E^A + \Phi_E^B = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \overset{(2)}{\Longleftrightarrow} \oint E\,dA =$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0 \quad (3)$$

$$= \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} E\oint dA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$(*)\quad \sigma = \frac{Q}{A} = \frac{q_{in}}{A_B} \Rightarrow q_{in} = \sigma A_B = \sigma \pi r^2$$

Ο νόμος του Gauss

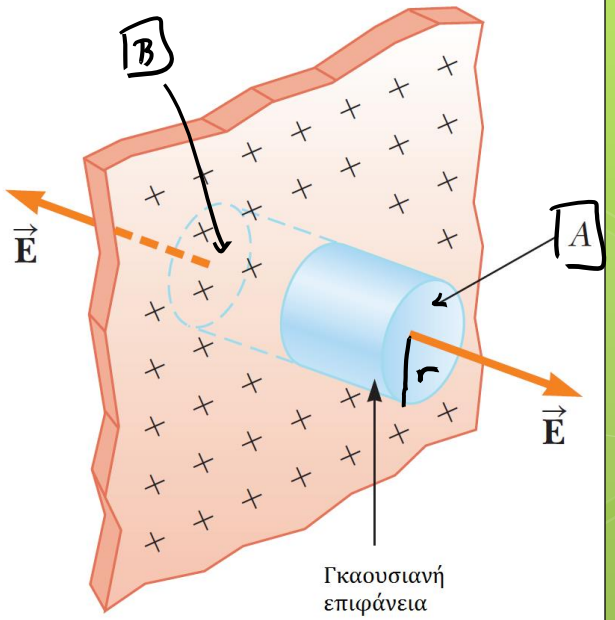
1. **Σταθερή τιμή του $\vec{E}$ στην επιφάνεια**
2. **$\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι παράλληλα**
3. **$\vec{E}$ και $d\vec{A}$ είναι κάθετα**
4. **$\vec{E}$ είναι μηδέν σε ένα τμήμα επιφάνειας**

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο λόγω μιας άπειρης επιφάνειας θετικά φορτισμένης με ομοιόμορφη επιφανειακή κατανομή φορτίου σ.

$$\Leftrightarrow E \underbrace{\oint dA}_{2\pi r^2} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E \cdot 2\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

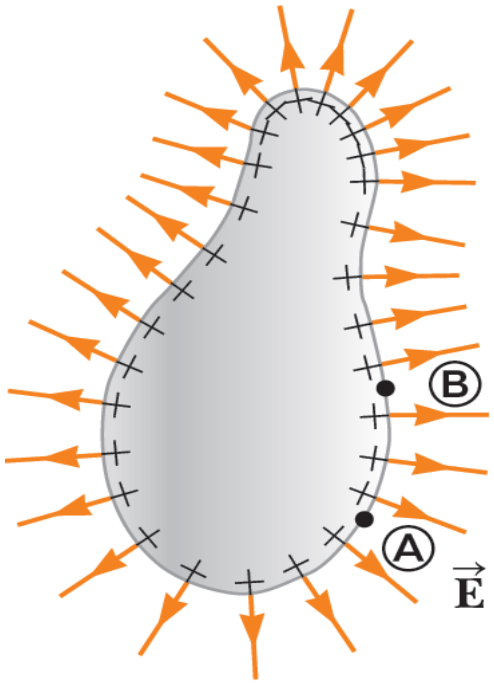
$$(*) \Leftrightarrow E \cdot 2\pi \cancel{r^2} = \frac{\sigma \pi \cancel{r^2}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow 2E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$, σταθερό σε κάθε σημείο.



Ο νόμος του Gauss

- **Αγωγοί – Ηλεκτρικό Πεδίο**
  - Μπορεί κανείς να δείξει ότι ένας στέρεος αγωγός σε ηλεκτροστατική ισορροπία (τα φορτία δεν κινούνται) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες
    - Το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς **έξω** από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνειά του και έχει μέτρο $\mathrm{E} = \sigma/\epsilon_0$
    - Το ηλεκτρικό πεδίο **εντός** του αγωγού είναι μηδέν
      - …είτε ο αγωγός είναι συμπαγής είτε «κούφιος»
    - Αν ο αγωγός είναι μονωμένος και φέρει φορτίο, το φορτίο βρίσκεται στην επιφάνειά του
    - Σε έναν αγωγό ακαθόριστου σχήματος, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι μεγαλύτερη εκεί που η κυρτότητά του είναι μεγαλύτερη



Τέλος Διάλεξης